Μαθημα 10º 1/4/2017

Αλγεβρικες Δομες

Ειχαμε πει...

G ομαδα, $g \in G$ → τρεχει το a, σταθ g

$[g] = \{aga^{-1} \mid a \in G\}$ κλαση συζυγιας

$G = \sqcup$ κλασεις συζυγιας

→ ξενη ενωση

$[\sigma] = \{\sigma\} \Leftrightarrow \sigma \in Z(G)$

- θα κανω το ιδιο με υποομαδα

$H \leq G$ και οριζουμε την $gHg^{-1} = \{gHg^{-1} \mid h \in H\}$

* *

Προταση

$gHg^{-1} \leq G \quad \forall g \in G$ και $H \leq G$: $|gHg^{-1}| = |H|$

αποδειξη

gh_1g^{-1} και gh_2g^{-1}

$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$

Αρα $gHg^{-1} \leq G$

$\phi : H \to gHg^{-1}$ 1-1 $ghg^{-1} = gh'g^{-1} \Leftrightarrow h = h'$

$h \mapsto ghg^{-1}$ επι $\phi(h) = ghg^{-1}$ επι

Ερωτημα: Ποτε $gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$;

$gHg^{-1} = H \Leftrightarrow gH = Hg \quad \forall g \in G$

π.χ αν G αβελιανη, ισχυει για καθε υποομαδα της

Γενικα δεν ισχυει!

Ορισμος: Αν H υποομαδα της O και ισχυει $gH = Hg$ $\forall g \in O$, τοτε η H θα καλειται **κανονικη** υποομαδα και θα γραφουμε $H \trianglelefteq O$

παραδειγμα

$\Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$

$H = \langle g \rangle = \{1, g\}$

$fH = \{f, fg\}$

$Hf = \{f, gf = f^2g\}$

$Hf \neq fH$ αρα $H \ntrianglelefteq \Sigma_3$

2 συμπλοκα θα εχει

$H' = \langle f \rangle = \{1, f, f^2\}$

Συμπλοκα H', Hg

$Hg = \{g, fg, f^2g\}$

$gH = \{g, gf = f^2g, gf^2 = fg\}$

$Hg = gH$ αρα $H' \trianglelefteq \Sigma_3$

προταση

Αν $[O:Y] = 2$ τοτε $Y \trianglelefteq O$ (δεν ισχυει το αναποδο)

αποδειξη

$[O:Y] = 2 \Rightarrow$ η Y εχει μονο δυο συμπλοκα στην O

$O = Y \sqcup gY = Y \sqcup Yg$ ⊕ οπου $g \notin Y \Rightarrow gY = Yg$

Εστω $a \in O$ τυχαιο, πρεπει $aY = Ya$

Εχω δυο περιπτωσεις $a \in Y$ ή $a \notin Y$.

Αν $a \in Y \Rightarrow aY = Y = Ya$

Αν $a \notin Y \Rightarrow a \in gY$ και Yg ⊕

δηλ $a = gh$ και $a = h'g$

Θελουμε $aYa^{-1} = (gh)Y(gh)^{-1} = g\overbrace{hYh^{-1}}^{Y}g^{-1} = gYg^{-1} = Y$

Το ιδιο ισχυει και για $a = h'g$

Συνεπως $Y \trianglelefteq G$

⊛ Εστω $Y \trianglelefteq G$ και $[G:Y] = m \le \infty$

$$G = \bigsqcup_{1\le i\le \infty} g_i Y = \bigsqcup_{1\le i\le \infty} Y g_i$$

π.χ $G = \mathbb{Z}$, $Y = 5\mathbb{Z}$ συμπλοκα

$[\mathbb{Z} : 5\mathbb{Z}] = 5$

$$\mathbb{Z} = \underset{\downarrow\,[0]_5}{5\mathbb{Z}} \sqcup \underset{\downarrow\,[1]_5}{(1+5\mathbb{Z})} \sqcup \underset{\downarrow\,[2]_5}{(2+5\mathbb{Z})} \sqcup \dots \sqcup \underset{\downarrow\,[4]_5}{(4+5\mathbb{Z})}$$

στο $\mathbb{Z}_4^*$ το $[2]$ δεν εχει αντιστροφο

Ερωτημα: Αν $Y \trianglelefteq G$ οριζεται πραξη μεταξυ των συμπλοκων; ΝΑΙ

Ορισμος: Με G/H συμβολιζουμε το συνολο των συμπλοκων $\{gH / g \in G\}$ ή $\{Hg / g \in G\}$ οταν η H ειναι κανονικη

Οριζουμε μια πραξη στο συνολο G/H η οποια κληρονομειται απο την πραξη της G

$$(gH)\cdot(g'H) = (gg')H$$

Προσοχη

$gH = g_1 H \Leftrightarrow g^{-1}g_1 \in H$ ②

$g'H = g_1' H \Leftrightarrow (g')^{-1} g_1' \in H$ ①

$(gH)(g'H) \overset{\text{ορ.}}{=} (gg')H$

$(g_1H)(g_1'H) = (g_1g_1')H$

ποτε ειναι ισα;

Τα συμπλοκα

$(gg')H$ και $(g_1g_1')H$ ειναι ισα αν και μονο αν

$(gg')^{-1}(g_1g_1') \in H$

$(g')^{-1} g^{-1} g_1 g_1' \overset{①}{=} (g')^{-1} \underbrace{g^{-1} g_1}_{② \in H} g' \underbrace{(g')^{-1} g_1'}_{\in H}$

$\Rightarrow \underbrace{(g')^{-1} h g'}_{\in H} \underbrace{h'}_{\in H} \in H$ εχω την κανονικοτητα

Η πραξη μεταξυ των συμπλοκων οταν $H \trianglelefteq O$, ειναι καλα ορισμενη

Προταση

Το συνολο O/H με την προηγουμενη πραξη αποτελει ομαδα. Η ομαδα αυτη καλειται ομαδα πηλικο της O ως προς H

αποδειξη

προσεταιριστικη: $((g_1H)(g_2H))(g_3H) = (g_1g_2H)(g_3H) =$

$= (g_1g_2)g_3H = g_1(g_2g_3)H = (g_1H)(g_2g_3)(H) = (g_1H)((g_2H)(g_3H))$

μοναδιαιο στοιχειο το H

$gH \cdot H = gH \cdot 1 \cdot H$

$g \cdot 1 \cdot H = gH \quad \forall\, gH \in G/H$

Αντιστροφος $(gH)^{-1} = g^{-1}H$

$(gH)(g^{-1}H) = gg^{-1}H = 1 \cdot H = H$

παραδειγμα

① η $\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ αβελιανη

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}\}$

Δηλ η ομαδα πηλικο $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ δεν ειναι τιποτα αλλο απο το $\mathbb{Z}_n$

② $\mathbb{Z}_{48}$ και $4\mathbb{Z}_{48} \leq \mathbb{Z}_{48}$. Να βρεθει η ομαδα $\mathbb{Z}_{48}/4\mathbb{Z}_{48}$

Λυση

$$[\mathbb{Z}_{48} : 4\mathbb{Z}_{48}] = \frac{|\mathbb{Z}_{48}|}{|4\mathbb{Z}_{48}|} = \frac{48}{O(4)} = \frac{48}{\frac{48}{(4,48)}} = 4$$

Συμπλοκο: $\mathbb{Z}_{48}/4\mathbb{Z}_{48} = \{4\mathbb{Z}_{48}, 1 + 4\mathbb{Z}_{48}, 2 + 4\mathbb{Z}_{48}, 3 + 4\mathbb{Z}_{48}\}$

$\mathbb{Z}_{48}/4\mathbb{Z}_{48}$ ειναι σχεδον ιδια με την $\mathbb{Z}_4$

③ $\Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$
$H = \langle f \rangle \trianglelefteq \Sigma_3$
Σ_3/H : $|\Sigma_3/H| = [\Sigma_3 : H] = 2$
Αρα Σ_3/H ειναι σχεδον ιδια με την $\mathbb{Z}_2$
$\Sigma_3/H = \{H, gH = Hg\}$

Πορισμα
Αν O αβελιανη, τοτε καθε υποομαδα της ειναι κανονικη και οριζεται η ομαδα πηλικο O/H

Πορισμα
Η εναλλασσουσα υποομαδα A_n της Σ_n ειναι κανονικη και Σ_n/A_n ειναι η ομαδα με δυο στοιχεια Δηλαδη σχεδον ιδια με την $\mathbb{Z}_2$
αποδειξη
$[\Sigma_n : A_n] = 2 \Rightarrow A_n \trianglelefteq \Sigma_n$

π.χ
Ομαδα Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = O$ (μη κυκλικη αβελιανη)
$H = \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$ και $H' = \langle (1,1) \rangle$
O/H εχει $[O : H] = 2$ στοιχεια (κρυμμενη η $\mathbb{Z}_2$ παλι)
$O/H = \{H, (0,1) + H\}$
$((0,1) + H) + ((0,1) + H) = ((0,1) + (0,1)) + H = (0,0) + H = H$
$H' = \langle (1,1) \rangle = \{(1,1), (0,0)\}$
$O/H' = \{H', (1,0) + H' = (0,1) + H'\}$

$((1,0)+H') = \{(0,1),(1,0)\}$
$((0,1)+H') = \{(1,0),(0,1)\}$
συνεπώς $(1,0)+H' = (0,1)+H'$ ισα, αν δεν ηταν ισα θα ειχαμε 3 συμπλοκα.

Ομομορφισμοι ομαδων (γνωριζω απο γραμμ. αλγ.)
$\exists$ απεικονισεις $\phi: V \longrightarrow V'$ δ.χ (διανυσματικος χωρος)

Ορισμος: Αν O, O' ειναι ομαδες, μια απεικονιση $\varphi: O \to O'$ καλειται ομομορφισμος ομαδων, αν ισχυει $\varphi(a \odot_O b) = \varphi(a) \odot_{O'} \varphi(b)$ $\forall a, b \in O$

π.χ

$\varphi: \Sigma_3 \to \mathbb{Z}_2$
$\varphi(a) = 0 \quad \forall a \in \Sigma_3$
$\varphi(ab) = 0 = \varphi(a) + \varphi(b) = 0+0$
πραγματι ειναι ομομορφισμοι
αν ειχαμε πει $\varphi(f) = 1$ και $\varphi(f^2) = 1$
τοτε θα ειχαμε $\varphi(f^2) = \varphi(f \cdot f) \underset{\text{επρεπε}}{\overset{\text{θα}}{=}} \varphi(f) + \varphi(f) =$

$= 1+1 = 0 \neq \varphi(f^2) = 1$, αρα δεν ειναι ομομορφισμος

Π.χ.

$\varphi: \mathbb{Z} \to \kappa\mathbb{Z}$, να ορισθει ομομορφισμος ομαδων

$\varphi(a) = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}$

$\varphi(a\beta) = 0 = \varphi(a) + \varphi(\beta) = 0+0$

Αυτος ειναι ο τετριμμενος ομομορφισμος

Θα παρουμε εναν που δεν ειναι τετριμμενος

(θα τον ορισουμε εμεις.)

παιρνω μια φ'

$\varphi'(1) = \kappa$ και $\varphi'(a) = 0 \quad \forall\, a \neq 1$

οχι ομομορφισμος γιατι $\varphi'(2) = \kappa+\kappa$ ενω το

αλλο μας λεει οτι $\varphi'(2) = 0$

οριζουμε τοτε $\varphi'(1) = \kappa a$, ειναι τοτε η φ'

ομομορφισμος; Την ζητα με να ειναι

$\varphi'(1+1) = \varphi'(1) + \varphi'(1) = \kappa a + \kappa a = 2\kappa a$

$\varphi'(2\cdot 1) = 2(\varphi'(1)) = 2\kappa a$

Ειναι ομομορφισμος, γιατι

$\varphi'(\gamma+\delta) \overset{;}{=} \varphi'(\gamma) + \varphi'(\delta)$

$\varphi'(\gamma) = \gamma\kappa a$, $\varphi'(\delta) = \delta\kappa a$

$\varphi'(\gamma+\delta) = (\gamma+\delta)\kappa a = \gamma\kappa a + \delta\kappa a$

$\Big\}\ \varphi'(\gamma+\delta) = \varphi'(\gamma) + \varphi'(\delta)$

Ειναι η φ' 1-1 σαν απεικονιση;

$\varphi'(\gamma) = \varphi'(\delta) \Rightarrow \gamma\kappa a \overset{\text{ειναι παντα } \gamma=\delta;}{=} \delta\kappa a \Rightarrow$

- αν κ ή $a = 0$ τοτε φ' οχι 1-1
- αν $\kappa a \neq 0$ τοτε φ' ειναι 1-1

Ειναι η φ' επι;

$\forall\, \kappa\beta \in \kappa\mathbb{Z} \Rightarrow \exists\, \gamma \in \mathbb{Z}$ με $\varphi'(\gamma) = \kappa\beta \Leftrightarrow \gamma\kappa a = \kappa\beta$

- αν $\kappa = 0 \Rightarrow \varphi'$ τετριμμενη

$\varphi' : \mathbb{Z} \to 0 \cdot \mathbb{Z} = \{0\}$, αρα επι

- αν $\kappa \neq 0$: $\gamma\kappa a = \kappa\beta \iff \gamma a = \beta$ (που εχει δωσει το β, ψαχνω το γ).

- αν $a = 0 \Rightarrow \varphi'$ τετριμμενη και οχι επι γιατι τα στελνει ολα στο 0

- αν $a \neq 0 \Rightarrow \gamma a = \beta$ → που το εχει δωσει

γ → ψαχνω

θα εχει λυση για $a = \pm 1$ (και το $\beta = \pm 1$)

γεννητ → γεννητ σε κυκλ εχω τα παντα (1-1, επι)

γεννητ → πολλαπλασιο γεννη οχι επι αλλα 1-1 → δεν τα παιρνει ολα.

τετρ → 0

Αν φ : κυκλικη → κυκλική είναι ομομορφισμος και γεννητορας ⟼ γεννητορα, τοτε ο φ είναι 1-1 και επι δηλ. η καλυτερη περιπτωση.
Διαφορετικά είναι 1-1 αλλα οχι επι.

Scanned by CamScanner